ある非線形波動方程式の解の予想(数式処理と数学研究への応用)

数理解析研究所講究録
581巻 1986年 77-81

ある非線形波動方程式の解の予想

広大 工 広田良吾 (Ryogo Hirota)

浅い水の波を記述する方程式として，次の非線形偏微分方程式が Whitham のテキスト "Linear and Nonlinear Wave Equations" P.465 に出ている．

$$\begin{cases} \eta_t + (1+\alpha\eta) w_x - \frac{1}{6}\beta w_{xxx} + O(\alpha\beta, \beta^2) = 0, \\ w_t + \alpha w w_x + \eta_x - \frac{1}{2}\beta w_{xxt} + O(\alpha\beta, \beta^2) = 0. \end{cases}$$

ここで α, β はオーダーパラメータである。

この式で

$$w = u + \frac{1}{2}\beta u_{xx} + O(\alpha\beta, \beta^2)$$ とおくと，上式は

$$\begin{cases} \eta_t + [(1+\alpha\eta) u]_x + \frac{1}{3}\beta u_{xxx} + O(\alpha\beta, \beta^2) = 0, \\ u_t + [\eta + \frac{\alpha}{2} u^2]_x + O(\alpha\beta, \beta^2) = 0. \end{cases}$$

となる。

cf. E.V. Krishnan : J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) 2391.
S. Kawamoto : J. Phys. Soc. Jpn. 53 (1984) 2922.

この式は、Krishnanによって"Classical Boussinesq Equation"と呼ばれている。オーダー$O(\alpha\beta, \beta^2)$の項を無視するとスケーリングによって"Classical Boussinesq Equation"は次の形になる。

$$\begin{cases} u_t = [(1+u)v + v_{xx}]_x \\ v_t = (u + \frac{1}{2}v^2)_x \end{cases}.$$

この式のように物理現象を記述する非線形波動方程式は一般にソリトン方程式（可積分系）である可能性は少ない。したがって、逆散乱形式を探したり、N-ソリトン解を求めたりするのは無駄な努力になることが非常に多い。こういう式を見て、先ず我々がやるべき事は高次保存量を求めたり、Weiss-Painlevé テストを行うことである。この時、数式処理は非常に有効である。非線形波動方程式の高次保存量を求めるREDUCE PROGRAMは我々の研究室の伊藤雅明によって殆んど完成している。Computer Physics Communicationsに投稿する予定である。Weiss-Painlevé テストも数式処理で殆んど自動的に計算できる。

まず高次保存量が存在することが確認され，ついで Weiss Painlevé テストにも合格することが加古富士男によって確められた。これに力を得て，この方程式の2次形式への変換に成功した。結果は次の通りである。

変換 $u = u_0 + 2\rho_{xx}$, $v = v_0 + 2\phi_x$

$$\rho = \log(fg), \quad \phi = \log(f/g)$$

によって "Classical Boussinesq Equation" は2次形式

$$(D_\tau - D_x^2) f \cdot g = 0$$

$$[D_x D_\tau - (1+u_0) D_x - D_x^3] f \cdot g = 0$$

ここで $D_\tau = D_t - v_0 D_x$ である。

$D_x^m D_\tau^n$ は2項演算子で，次式で定義される。

$$D_x^m D_\tau^n f(x,\tau) \cdot g(x,\tau)$$

m, n は自然数。

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau'}\right)^n f(x,\tau)\, g(x',\tau') \Big|_{x'=x,\ \tau'=\tau}$$

2次形式に変換されると，N-ソリトン解を求めるのは容易である。まず数式処理を使って3-ソリトン解まで確めら

れた。所が3ーソリトン解を眺めているうちに、この解がModified KP方程式の $pq=\mathrm{const}$ に相当するREDUCTIONになっている事がわかり、それもまたREDUCEを使って確められた。

この研究の途中、中村明氏より連絡がかって、上の2次形式で $u_0=-1$ とおき、τ を it をおき換えた式

$$\begin{cases} (iD_t + D_x^2)\, g\cdot f = 0 \\ (iD_x D_t + D_x^3)\, g\cdot f = 0 \end{cases}$$

が多項式解

$$f = x^2 + 2it, \quad g = f^*$$

をもつことが発見され、解はExplode-Decay mode solutionになる事が示された。

cf. A. Nakamura and R. Hirota: "A New Example of Explode-Decay Solitary Waves in One-Dimension" accepted to J. Phys. Soc. Jpn.

中村氏の解にヒントを得て、カンを働かせて予想したのが次の解である。W をWronskianとして

$$f = \mathcal{W}\{H_{2n}(z), H_{2n-1}(z), \cdots, H_n(z)\} \qquad (n次)$$

$H_n(z)$はHermiteの多項式(n次),
zはSimilarity variable $z = x/\sqrt{2it}$,
gはfのcomplex conjugate.

この結果をnが小さいときでも手計算でやるのは大変だが,REDUCE 3.0を使うと簡単に$n = 1, 2, 3, 4, 5$まで確かめられる。予想は確かであると思われるが証明は未だである。Modified KP方程式の$pq = 0$ REDUCTIONの極限として得られそうである.